Probabilités Continues

Rémi Maubanc aka *Hyperion*

30 Mars 2020

1 Cours

1.1 Variables aléatoires réelles

Définition : Une variable aléatoire réelle est une application mesurable de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu Borélienne.

$\mathbb{B}$: la σ algèbre (Borélienne) engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.
$\forall B \in \mathbb{B}$ (B : borélien)
$X : (\Omega, \mathcal{C}, \mathcal{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathbb{B})$
$\mathcal{P}_X(B) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\})$

La tribu $(\mathcal{C})$ est la classe d'évènements (l'ensemble de tous les évènements).
(i) $\forall A \in \mathcal{C}, \overline{A} \in \mathcal{C}$
(ii) Soit $(A_i)_{i \in I}$ famille dénombrable d'évènements.
$\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{C} (A_i \in \mathcal{C})$ (i, ii) $\varnothing \in \mathcal{C}, \Omega \in \mathcal{C}$

La σ algèbre est la plus petite tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X(B) &= \mathcal{P}(\{\omega / X(\omega) \in B\}) \\ &= \mathcal{P}(\{X^{-1}(B)\}) \rightarrow \textit{image reciproque}\end{aligned}$$

Définition : La fonction de répartition de X est l'application $F : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$
$F(x) = \mathcal{P}(X < x)$
F est une fonction croissante et $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X est à densité lorsque sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Toute fonction f à valeurs positives qui ne diffère de la dérivée F' qu'en un nombre fini de points est appelé densité de X.

$F'(x) = f(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ privé de certains points. Théorème : Soit X une v.a. réelle à densité de fonction de répartition F. Si f est une densité de X alors $\forall x \in \mathbb{R} \ \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Démonstration : Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ les points en lesquels la primitive n'est pas définie. Supposons que $a_1 < a_2 < ... < a_n$

1^{er} cas : $X < a_i$

F est une primitive de f sur $]-\infty, x]$ et $\underset{t\to-\infty}{lim} f(t) = 0$

$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \big[F(t)\big]_{-\infty}^{x} = F(x)$

$2^e cas :$ $a_p \leq X \leq a_{p+1}$, $p \in [[1, n]]$

F est une primitive de f sur chaque interval $]a_b, a_{b+1}[$, $b \in [[0, p]]$ et donc sur $]a_p, x[$

$\forall k \in [[1, p-1]]$

$$\begin{array}{rcl}
\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt & = & \underset{t\to a_{k+1}}{lim} F(t) - \underset{t\to a_k}{lim} F(t) \\
& = & F(a_{k+1}) - F(a_k) \\
\int_{a_0}^{a_1} f(t)dt & = & \int_{-\infty}^{a_1} f(t)dt = \big[F(t)\big]_{-\infty}^{a_1} \\
& = & \underset{t\to a_i}{lim} F(t) - \underset{=0}{F(-\infty)} = F(a_1)
\end{array}$$

$\int_{a_p}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a_p)$

$$\begin{array}{rcl}
\int_{-\infty}^{x} f(t)dt & = & \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt + \int_{a_k}^{x} f(t)dt \\
& = & F(a_1) + \sum_{k=1}^{p-1} (F(a_{k+1}) - F(a_k)) + F(x) - F(a_p) \\
& = & F(x) \ (simplification\ des\ termes) \\
\int_{-\infty}^{x} f(t)dt & = & F(x)
\end{array}$$

Conséquences : $f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

(i) $F'(x) = f(x) \geq 0$ car F croissante.

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Une densité est caractérisée par deux points :

- positive
- son intégrale = 1

Exemple 1 :

$$f(x) = \begin{cases} cos(x) \ si \ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

1) Vérifier que $f(x)$ est une densité

2) Soit X une v.a. de densité $f(x)$: déterminez la fonction de répartition de X (fonction de répartition)

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)dt = \left[sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = sin(\frac{\pi}{2}) - sin(0) = 1$

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

1^{er} cas : $x \in]-\infty, 0]$ – $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

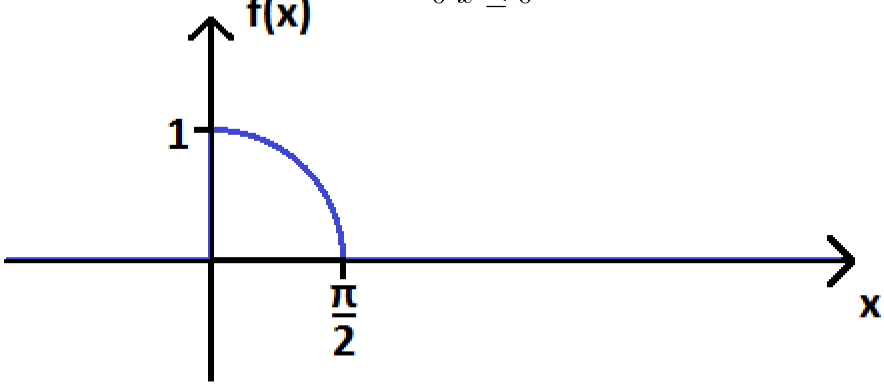
2^{e} cas : $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= 0 + \int_0^x cos(t)dt = sin(x) \end{aligned}$$

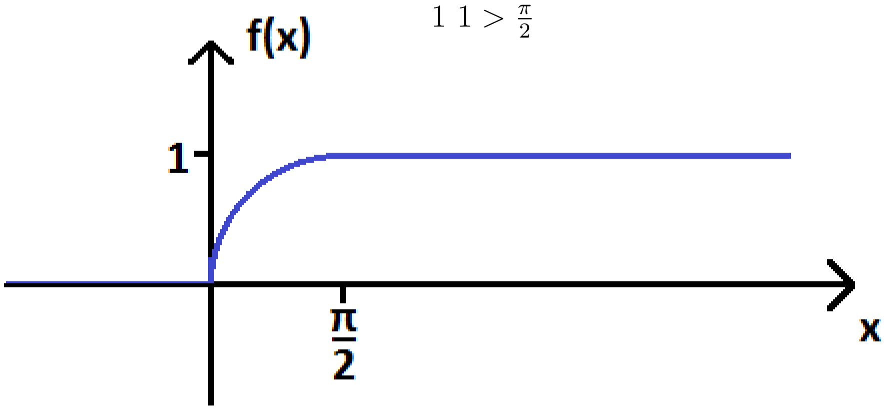
3^{e} cas : $e > \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 \end{aligned}$$

$0 \ x \leq 0$



$1 \; 1 > \frac{\pi}{2}$



$F(x) = sin(x) \; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Exemple 2 : X une v.a. de densité f. Soit F sa fonction de répartition.

$Y = \Phi = aX + b$ - $a \neq 0$

Déterminez la loi de Y.

Soit $G(x)$ la fonction de répartition de Y : $G(X) = \mathcal{P}(Y < x)$

$$\begin{aligned} Pour \; a > 0 \quad G(x) &= \mathcal{P}(aX + b < x) = \mathcal{P}(X \leq \frac{x-b}{a}) = F(\frac{a-b}{a} = F(\frac{x-b}{a}) \\ Pour \; a < 0 \quad G(x) &= \mathcal{P}(X > \frac{x-b}{a}) = 1 - \mathcal{P}(X \leq \frac{x-b}{a}) = 1 - F(\frac{x-b}{a}) \end{aligned}$$

Remarque : $\mathcal{P}(X = a) = 0$

$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

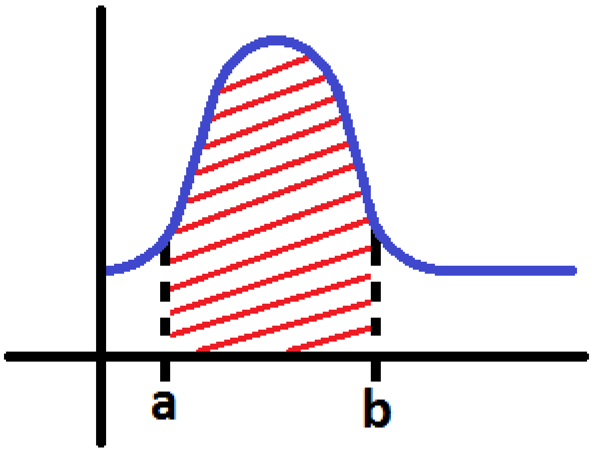
Si $a = b$ $\mathcal{P}(X = a) = 0$

$F(x) = \mathcal{P}(X < a) = \mathcal{P}(X \leq a)$

La densité de ϕ et $g(x) = G'(x)$

$$g(x) = G'(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} f(\frac{x-b}{a}) \mid a > 0 \\ \frac{-1}{a} f(\frac{x-b}{a} \mid a < 0 \end{cases}$$

$g(x) = \frac{1}{|a|} f(\frac{x-b}{a})$



1.2 Moments d'une v.a. continue

1.2.1 Espérence mathématiques

Définition : Soit X une v.a. continue de densité $f(x)$. On appelle espérence de X : $E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ si l'intégrale ω (?)

Remarque : E est linéaire.

$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) - \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Définition : $E(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)dx \to$ densité de λ (ϕ quelconque)

Exemple : (Loi de Cauchy)

Sa densité :

$$\underset{\forall x \in \mathbb{R}}{f(x)} = \frac{1}{\pi(1+x^2}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2} dx$$

$\frac{x}{1+x^2} \approx \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ divergente d'après Riemann avec $\alpha = 1$.

L'espérence de Cauchy n'existe pas.

1.2.2 Variance de X

Définition : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ où $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx$

2 Exercices

2.1 Exercice 1

Soit $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \ \forall x \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $f(x)$ est une densité de probabilité.
2. Soit X la VA de densite $f(x)$. Déterminer la fonction de repartition de X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$

$$\textbf{1)}\ f\ est\ une\ densite\ ssi\ : \begin{cases} (i) & f(x) \geq 0 \\ (ii) & \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx \underset{car\ f\ paire}{\Rightarrow} \frac{2}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \big[-e^{-x}\big]_{0}^{+\infty} = 1$$

2) $F(x) = \mathcal{P}(X < x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt \ \forall x \in \mathbb{R}$ fonction de répartition de X

<u>1^{er} cas :</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \frac{1}{2}\big[e^{t}\big]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{x}$$

<u>2^{e} cas :</u>

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \underset{Relation\ de\ Chasles}{=} \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$\left(Via\ 1er\ cas\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}e^{x} \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(t)dt = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-t}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big[-e^{-t}\big]_{0}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} * e^{-x} = F(x)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x > 0 \end{cases} \quad F(x)\ est\ continue\ sur\ \big]-\infty;0\big[\cup\big]0;+\infty\big[$$

$$En\ 0\ :\ \lim_{x\to 0^{+}} F(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0^{-}} F(x) = F(0) \Rightarrow F\ continue\ sur\ \mathbb{R}$$

3)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)dx. \ \ V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

Pourquoi $f(x)$ et pas $f(x^2)$? Def: $E(\phi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)dx$

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{xe^{-|x|}}_{impaire}dx \Rightarrow E(X) = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^2e^{-|x|}}_{paire}dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \int_{0}^{+\infty} \underbrace{x^2}_{v}*\underbrace{e^{-x}}_{u'}dx$$

$$IPP: \begin{array}{ll} v = x^2 & v' = 2x \\ u = -e^{-x} & u' = e^{-x} \end{array} \quad E(X^2) = \underbrace{\Big[-x^2e^{-x}\Big]_0^{+\infty}}_{\underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow}0} - \int_0^{+\infty} -2x * e^{-x}dx$$

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2\big[-e^{-x}\big]_0^{+\infty} = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{E^2(X)}_{=0} = 2$$

2.2 Exercice 2

Le fonctionnement d'une machine est pertubée par des pannes. On considère 3 variables aléatoires : $X_i(i = 1, 2, 3)$.

X_1 **:** temps ,exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la $1^{\text{ère}}$ panne.

X_2 **:** temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine et la $1^{\text{ère}}$ panne et la suivante.

X_3 **:** temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine et la 2^{e} panne et la suivante.

Après la 3^{e} panne, la machine est suspendue (X_i) sont indépendantes et suivant la même loi de densité $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$ si $t \geq 0$

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre les deux pannes consécutives ?

2. Soit E : "*chacune des trois périodes de fonctionnement dure plus de 2h*". Calculer $\mathcal{P}(E)$.

3. Soit Y V.A. : la plus grande des trois durées de fonctionnement. Calculer $\mathcal{P}(Y \leq t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

4. Déterminer une densité de Y.

5. Calculer $I = \int_0^{+\infty} te^{at}dt\ \forall a \in \mathbb{R}^*$. En déduire E(Y).

1) La durée moyenne de fonctionnement entre 2 pannes consécutives.

$$E(X_i) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underbrace{t}_{v}\ \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}}_{u'}dt = \frac{1}{2}\big[\underbrace{-2te^{-\frac{t}{2}}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow 0}}\big]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(-2e^{-\frac{t}{2}})dt$$

$$E(X_i) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt = \big[-2e^{-\frac{t}{2}}\big] = 2$$

2) On cherche $\mathcal{P}(E)$

$$E = \bigcap_{i=1}^{3}(X_i \geq 2); \mathcal{P}(E) = \prod_{i=1}^{3}\mathcal{P}(X_i \geq 2)$$

$$\mathcal{P}(X_i \geq 2) = \int_2^{+\infty} f(t)dt = \int_2^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}dt = -\big[e^{-\frac{t}{2}}dt\big]_2^{+\infty} = \frac{1}{2}(2e^{-\frac{2}{2}}) = e^{-1}$$

$$\mathcal{P}(E) = \left(e^{-1}\right)^3 = e^{-3}$$

3) $Y = \underset{1\leq i\leq 3}{Max} X_i$

$$\underset{\forall t\in\mathbb{R}}{\mathcal{P}(Y \geq t)} = \mathcal{P}(MaxX_i \leq t) = \mathcal{P}(X_i \leq t\ \ \forall i) = \mathcal{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{3}(X_i \leq t)\Big)$$

$$\mathcal{P}(Y \leq t) = \prod_{i=1}^{3}\mathcal{P}(X_i \leq t)\ ;\ \mathcal{P}(X_i \leq t) = F_{X_i}(t)\ fonction\ de\ repartition\ de\ X_i$$

<u>1^{er} cas :</u> $t < 0$

$$F_{X_i}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du = 0$$

<u>2^2 cas :</u> $t \geq 0$

$$F_{X_i}(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\ e^{-\frac{u}{2}}du = \frac{1}{2}\big[-2e^{-\frac{u}{2}}\big]_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$$

$$F_{X_i} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{2}} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \mathcal{P}(Y \geq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{3}{2}\ e^2\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

4) Une densité de Y.

$$f_Y(t) = F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2}{3}e^2\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 & t \leq 0 \end{cases}$$

5)

$$\int_0^{+\infty} \underset{v}{t}\ \underset{u'}{e^{\alpha t}} dt \quad \alpha < 0 \begin{cases} v = t & \Rightarrow \quad v' = 1 \\ u' = e^{\alpha t} & \Leftarrow \quad u = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} \end{cases}$$

$$I = [\ \underset{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow 0}}{\frac{t}{\alpha}}\ ]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$La\ densite\ Y\ \ f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 & t > 0 \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} t f_Y(t) dt = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}\big(1 - e^{-\frac{t}{2}}\big)^2 dt$$

On cherche à retrouver l'intégrale de la question 5)

$$E(Y) = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}(1-2e^{-\frac{t}{2}}+e^{-t})dt = \frac{3}{2}\Big(\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{2}}dt - 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt + \int_0^{+\infty} te^{-\frac{3}{2}t}dt\Big)$$

$$E(Y) = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1/4} - 2\frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{9/4}\Big) = \frac{3}{2}(2 + \frac{4}{9}) = \frac{11}{3}h = 3h40m$$

2.3 Exercice 3

La durée de fonctionnement, exprimé en jours, d'un certain composant électronique est une VA X dont la densité est : $f(x) = 0$ où $x < 0$ et $f(x) = \beta x^2 e^{-\alpha x}$ où $x \geq 0$ et $\alpha > 0$.

1. Calculer β en fonction de α.

2. Sachant qu'un tel composant fonctionne en moyenne pendant 200 jours. Calculer α.

3. Déterminer une densité de Y où $Y = \sqrt{X}$.

$$\mathbf{1)}\ f\ \textit{est une densite ssi}\ :\ \begin{array}{ll} (i) & f(x) \geq 0 \ \Rightarrow\ \beta \geq 0 \\ (ii) & \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \end{array}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \Rightarrow \beta \int_0^{+\infty} x^2\ e^{-\alpha x}dx = \big[-\frac{1}{\alpha}x^2 e^{-\alpha x}\big]_0^{+\infty} + \frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx$$

$$Soit\ I = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^2}_{v}\ \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u'}dx = \frac{2}{\alpha}\Big(\big[\underbrace{-\frac{x}{\alpha}\ e^{-\alpha x}}_{\longrightarrow 0}\big]_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx\Big)$$

$$I = \frac{2}{\alpha^2}\big[\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha x}\big]_0^{+\infty} = \frac{2}{\alpha^3}\ \mid\ I * \beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha^3}{2}$$

$$\mathbf{2)}\ E(X) = 200j = \beta \int_0^{+\infty} \underbrace{x^3}_{v}\ \underbrace{e^{-\alpha x}}_{u'}dx = \beta\Big(\big[-\frac{x^3}{\alpha}e^{-\alpha x}\big]_0^{+\infty} + \frac{3}{\alpha}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}dx\Big) = \frac{3}{\alpha}\beta I.$$

$E(X) = \frac{3}{\alpha}\beta I$ où $\beta I = 1 \Rightarrow 200j = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{200}$ **3)** $Y = \sqrt{X}$. La fonction de répartition de Y : $F_Y(x) = \mathcal{P}(Y < x)$

$$F_Y(x) = \mathcal{P}(\sqrt{X} < x) = \left\{ \begin{array}{rr} 0 & x < 0 \\ \mathcal{P}(X < x^2) = F_X(x^2) & x \geq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rr} 0 & x < 0 \\ \alpha^3 x^5 e^{-\alpha x} & x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$F_Y(x) = \left\{ \begin{array}{rr} 0 & x < 0 \\ 2xf(x^2) & x \leq 0 \end{array} \right.$$

$$F_Y(x) = 2x\beta x^4 e^{-\alpha x^2} = \alpha^2 x^5 e^{-\alpha x^2}\ \mid\ x \geq 0$$